Giochi di Archimede 2018

Soluzioni gara biennio (versione T1)

(1) La risposta corretta è (D).
Le frazioni sono infatti tutte del tipo $\frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$, dunque la più piccola è quella che ha il denominatore x massimo.
Quesito proposto da Gabriele Manganelli.

(2) La risposta corretta è (A).
Difatti, se n è un numero somma dei quadrati di due numeri $3h, 3k$ interi multipli di tre, allora deve aversi $n = 9(h^2 + k^2)$; dunque n è divisibile per 9. Delle risposte possibili soltanto 450, 270 e 189 sono divisibili per 9. Dividendo per 9 tali numeri, si trovano 50, 30 e 21. Di questi, solo $50 = 1^2 + 7^2 = 5^2 + 5^2$ è esprimibile come somma di due quadrati.
Quesito proposto da Gabriele Manganelli.

(3) La risposta corretta è (E).
I cubetti che avranno due facce colorate di rosso corrispondono precisamente ai cubetti che giacciono sugli spigoli del cubo, ma non nei vertici. Su ogni spigolo, con esclusione dei vertici, ci sono 8 cubetti, ed il totale degli spigoli di un cubo è 12: tali cubetti saranno dunque $8 \cdot 12 = 96$.
Quesito proposto da Carmelo di Stefano.

(4) La risposta corretta è (C).
Dopo che Luca ha pescato una carta da quelle di Claudia, Claudia si trova con una carta di un colore, e Luca con tre, di cui una sola dello stesso colore della carta che resta a Claudia: la probabilità che Claudia peschi proprio quella (e si ritrovino quindi entrambi con due carte dello stesso colore) è quindi 1/3.
Quesito proposto da Sandro Campigotto.

(5) La risposta corretta è (A).
Siano H, K, L ed M rispettivamente i vertici intersezione del segmento AG con i segmenti BC, CD, DE ed EF. Poiché la somma degli angoli interni di un triangolo dà $180°$, si ottiene che gli angoli in H (tra loro opposti e uguali) sono uguali a $73°$, e quelli in M uguali a $75°$. Gli angoli in K valgono allora $180° - 73° - x° = 107° - x°$ e quelli in L valgono $180° - 75° - x° = 105° - x°$. Ne consegue, sommando gli angoli interni del triangolo KDL, che $50 + 107° + 105° - 2x = 180°$, ovvero $x = 41°$.
Quesito proposto da Paolo Francini.

(6) La risposta corretta è (C).
Infatti, se n è il numero di soldatini di Cesare, e ne avanza sempre uno nella divisione per 2, 3, 4, 5, 6 e 7, vuol dire che $n - 1$ è divisibile per tutti questi numeri; quindi $mcm(2, 3, 4, 5, 6, 7) = 420$ divide $n - 1$. L'unico multiplo di 420 compreso tra 2000 e 2500 è 2100. Pertanto si ha $n = 2101$, il cui divisore più piccolo (diverso da 1) è 11.
Quesito proposto da Matteo Rossi.

(7) La risposta corretta è (D).
Per il teorema di Pitagora, si ha $A_2A_3 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, quindi $A_3A_4 = \sqrt{1^2 + 2} = \sqrt{3}$ e così via: $A_nA_{n+1} = \sqrt{1^2 + (n-1)} = \sqrt{n}$. Dunque $A_{100}A_{101} = 10$.
Quesito proposto da Paolo Francini.

(8) La risposta corretta è (E).
Tenendo in considerazione esclusivamente il genere delle 4 persone (maschio o femmina), il numero totale di possibili configurazioni è uguale a 20: cioè 5 (corrispondente a scegliere una delle 5 sedie da lasciar vuota) moltiplicato per 4 (il numero possibile di scelte per il posto del ragazzo, una volta decisa la sedia che resta vuota). Il numero di casi favorevoli, cioè in cui la sedia vuota si trova tra due ragazze, è invece uguale a 10: cioè 5 (come sopra) moltiplicato per 2 (corrispondente, una volta fissata la sedia che resta vuota, al numero possibile di scelte per il posto del ragazzo, non adiacente a tale sedia). La probabilità richiesta è dunque uguale a $10/20 = 1/2$.
Quesito proposto da Matteo Rossi.

(9) La risposta corretta è (C).
Sia Δ lo spessore della cornice. Per ipotesi si ha $32 + 2\Delta = \frac{5}{4}(24 + 2\Delta)$, da cui si deduce $\Delta = 4$. L'area del rettangolo delimitato dal bordo esterno della cronice è $(32 + 8) \cdot (24 + 8) = 1280$ cm^2.
Quesito proposto da Paolo Negrini.

(10) La risposta corretta è (B).
Detta E l'energia totale immagazzinabile nel cellulare, l'energia immagazzinata in un minuto senza usarlo sarà uguale $\frac{E}{120}$: l'energia immagazzinata in un minuto di utilizzo sarà invece uguale a $\frac{1}{2} \cdot \frac{E}{120} = \frac{E}{240}$. Se il tempo necessario alla ricarica con x minuti di utilizzo è di 150 minuti, allora deve aversi $(150 - x)E/120 + xE/120 = E$, dunque $x = 60$.
Quesito proposto da Giorgio Navone.

(11) La risposta corretta è (D).
Un tale triangolo isoscele ha in effetti base uguale a 2018 e i due lati di ugual lunghezza, detta n, inferiore. Deve aversi allora $0 < n < 2018$ e, per la disuguaglianza triangolare, $2018 < 2n$. Ne consegue che le misure possibili dei pdue lati uguali varia tra i numeri interi strettamente compresi tra 0 e 1009: i possibili triangoli sono dunque 1008.
Quesito proposto da Carmelo Di Stefano.

(12) La risposta corretta è (A).
I multipli di 11 tra 1 e 1500 sono 136, in quanto $1000 = 136 \cdot 11 + 4$. Eliminando tali numeri resta una lista di 1364 numeri da mettere nella tabella, di cui il numero 1500 è l'ultimo: poiché $1364 = 194 \cdot 7 + 6$, tale ultimo numero cadrà pertanto nella 6^a colonna colonna della 195^a riga.
Quesito proposto da Carmelo Di Stefano.

(13) La risposta corretta è (E).
Infatti, il numero di T nella sequenza di monete rimane sempre dispari, dopo ogni mossa: pertanto non è possibile arrivare a una configurazione contenente esattamente due T.
Quesito proposto da Gabriele Manganelli.

(14) La risposta corretta è (A).
Conduciamo i segmenti che congiungono P ai quattro vertici: essi tagliano le quattro regioni in triangoli aventi a due a due la stessa area, in quanto aventi ugual base ed altezza. Da ciò segue che le somme delle aree delle due coppie di regioni opposte sono uguali.
L'area mancante è perciò $28 + 23 - 19 = 32$.
Quesito proposto da Giovanni Maria Tomaselli.

(15) La risposta corretta è (B).
Per ogni possibile disposizione compatibile con le richieste di Michela, vi sara' una e una sola colonna lasciata vuota. Se tale colonna è la prima (oppure l'ultima), ci sono esattamente 2 disposizioni possibili, determinate da quale casella della colonna adiacente contiene una moneta. Se invece la colonna lasciata libera non è né la prima né l'ultima (dunque una delle 98 rimanenti), ci sono 4 disposizioni possibili, determinate dalle 4 possibili disposizioni di due monete nelle caselle delle due colonne adiacenti. In totale, le disposizioni possibili saranno dunque $2 \cdot 2 + 4 \cdot 98 = 396$.
Quesito proposto da Matteo Rossi.

(16) La risposta corretta è (D).
Per il teorema di Pitagpra, l'altezza relativa al lato AC misura (in cm) $\sqrt{5^2 - 3^3} = 4$. Perciò l'area del triangolo è pari a $\frac{4 \cdot 6}{2} = 12$ cm^2. Segue che la misura dell'altezza CD (sempre in cm) è pari a $\frac{2 \cdot 12}{5} = 24/5$. Segue che $\overline{BD} = \sqrt{5^2 - (24/5)^2} = 7/5$ e quindi l'area di BCD risulta uguale a $\frac{(7/5)*(24/5)}{2} = 84/25$.
Quesito proposto da Paolo Francini.

Come sempre, i problemi proposti sono stati, oltre che controllati e selezionati, in molti casi ampiamente modificati o riformulati dai responsabili della gara. Pertanto, nell'indicare i nominativi degli autori delle proposte, resta inteso che i responsabili sia della scelta dei quesiti, sia di eventuali errori, imprecisioni o formulazioni criticabili, sono da individuarsi esclusivamente nei responsabili stessi della gara ed in nessuna misura negli autori delle proposte. A tutti loro, ed anche a chi ha contribuito con quesiti che non sono stati selezionati, va il nostro ringraziamento per la varietà, l'originalità e la qualità delle proposte presentate.

I responsabili dei Giochi di Archimede,
Paolo Francini, Andrea Sambusetti